EPFL

X

**Enseignant : Mathieu Huruguen**
**Algèbre Linéaire - CMS**
**14 juin 2024**
**Durée : 105 minutes**

# Contrôle 4 (Corrigé)

SCIPER : **XXXXXX**

**Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 questions et 6 pages, les dernières pouvant être vides. Il y a 25 points au total. Ne pas dégrafer.**

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  $0$ point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  $0$ point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

| choisir une réponse \| select an answer Antwort auswählen | ne PAS choisir une réponse \| NOT select an answer NICHT Antwort auswählen | Corriger une réponse \| Correct an answer Antwort korrigieren |
|---|---|---|

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

## Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Pour les **Questions 1, 2 et 3** on donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ (x, y, z) \to (x - 2y + z, 6x + 3y - 9z, -7x - y + 8z)\,.$$

**Question 1** (3 points) Quel est le coefficient en haut à gauche dans la matrice (en base canonique) de la projection sur $\mathrm{Im}\, f$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, f$ ?

☐ $\frac{1}{3}$ ■ $\frac{2}{3}$ ☐ $3$ ☐ $1$

*Correction : On trouve $\mathrm{Im}\, f : x+y+z = 0$ et $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$. Par conséquent la matrice cherchée est :*

$$I_3 - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\,.$$

**Question 2** (2 points) Combien $f$ possède-t-elle de valeur(s) propre(s) ?

☐ $2$ ☐ $3$ ☐ $0$ ■ $1$

*Correction : On trouve $\chi_f(X) = -X((X - 6)^2 + 3^2)$. Il y a donc une seule valeur propre, à savoir $0$.*

**Question 3** (2 points) Parmi les affirmations suivantes, une seule est vraie. Laquelle ?

- ☐ $f$ est diagonalisable
- ■ $f$ n'est pas diagonalisable, mais elle est diagonalisable par blocs
- ☐ $f$ n'est pas diagonalisable par blocs
- ☐ $f$ est diagonalisable, mais elle n'est pas diagonalisable par blocs

*Correction : $0$ est la seule valeur propre et $f$ est non nulle : elle n'est pas diagonalisable. Par contre elle est diagonalisable par bloc : le plan $x + y + z = 0$ est stable par $f$ et le vecteur propre $(1, 1, 1)$ se trouve en dehors de ce plan.*

Pour les **Questions 4, 5, 6** on donne l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha^2 & -\alpha^3 & \alpha^2 \\ 2\alpha+4 & -\alpha^2-2\alpha & \alpha+2 \\ 2 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

en base canonique, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Pour combien de valeur(s) de $\alpha$ ...

**Question 4** (2 points) ... $f$ est-elle une projection ? *Indication : s'intéresser au rang de $f$.*

☐ $0$ ☐ $1$ ■ $2$ ☐ une infinité

*Correction : $f$ étant de rang $1$, c'est une projection si et seulement si elle est de trace $1$. On trouve que c'est le cas pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 2$.*

**Question 5** (2 points) ... $f$ n'est-elle pas diagonalisable ?

■ $1$ ☐ $0$ ☐ une infinité ☐ $2$

*Correction : $f$ est de rang $1$ et de trace $(\alpha-1)^2$. Si $\alpha \neq 1$ cette trace est non nulle, $f$ est diagonalisable. Pour $\alpha = 1$ on trouve $\chi_f(X) = -X^3$ mais $f$ est non nulle : elle n'est pas diagonalisable.*

**Question 6** (1 point) ... le plan vectoriel d'équation $z = 0$ est-il stable par $f$ ?

■ $0$ ☐ une infinité ☐ $1$ ☐ $2$

*Correction : Le vecteur $v = (1,0,0)$ est sur le plan vectoriel $z = 0$, mais son image $f(v) = (2\alpha^2, 2\alpha+4, 2)$ n'y est pas (quelque soit la valeur de $\alpha$).*

## Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 7:** *Cette question est notée sur 8 points.*

.5 .5 .5 .5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5 6 7 8

On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,,\ (x, y, z) \to (-7x + 4y - 8z, -8x + 5y - 16z, 4x - 4y + 5z) \,.$$

(a) Montrer que le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation :

$$x - y + 2z = 0$$

est stable par $f$. En déduire une valeur propre de $f$.

(b) Calculer le polynôme caractéristique de $f$ sous forme factorisée.

(c) Montrer que $f$ est diagonalisable et déterminer une base propre de $f$.

**Solution** La matrice de $f$ en base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -8 \\ -8 & 5 & -16 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} .$$

(a) On calcule :

$${}^tA \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 & 4 \\ 4 & 5 & -4 \\ -8 & -16 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 18 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Cela montre bien que le plan d'équation $x - y + 2z = 0$ est stable par $f$. Par ailleurs, ce calcul montre aussi que $9$ est valeur propre de ${}^tA$, et donc de $A$ (et donc de $f$).

(b) On obtient :

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} -7-X & 4 & -8 \\ -8 & 5-X & -16 \\ 4 & -4 & 5-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7-X & 4 & -8 \\ -8 & 5-X & -16 \\ -3-X & 0 & -3-X \end{vmatrix}$$

où la deuxième égalité est obtenue en appliquant l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ (qui préserve le déterminant). Ensuite, on peut extraire le facteur $-3 - X$ de la troisième ligne, puis on applique l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ :

$$\chi_f(X) = (-3-X) \begin{vmatrix} -7-X & 4 & -8 \\ -8 & 5-X & -16 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-3-X) \begin{vmatrix} 1-X & 4 & -8 \\ 8 & 5-X & -16 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

Le développement selon la troisième ligne donne maintenant :

$$\chi_f(X) = (-3-X) \begin{vmatrix} 1-X & 4 \\ 8 & 5-X \end{vmatrix} = (-3-X)(X^2 - 6X - 27) = -(X+3)^2(X-9) \,.$$

(c) On cherche les sous-espaces propres de $f$ :

$$A+3I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -8 \\ -8 & 8 & -16 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ker}(f+3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) : x-y+2z=0\,.$$

La multiplicité géométrique de $-3$ est égale à $2$ : $f$ est bien diagonalisable. Cherchons maintenant le sous-espace propre pour la valeur propre $9$ (c'est une droite vectorielle) :

$$A-9I_3 = \begin{pmatrix} -16 & 4 & -8 \\ -8 & -4 & -16 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f-9\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x+y-2z=0 \\ -2x-y-4z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3y-6z=0 \\ -3y-6z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y=-2z \\ x=-z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z)=(-z,-2z,z)=z(-1,-2,1)\,.$$

On a donc établi que :

$$\mathrm{Ker}(f-9\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}((-1,-2,1))\,.$$

Pour produire une base propre de $f$, il n'y a plus qu'à mettre ensemble des bases des deux sous-espaces propres. Par exemple la base suivante de $\mathbb{R}^3$ est propre pour $f$ :

$$\mathcal{B} = (1,1,0),(0,2,1),(-1,-2,1)\,.$$

**Question 8:** *Cette question est notée sur 5 points.*

.5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $3$, on donne :

$$W = \{\, P(X) \in \mathbb{R}_3[X] \ \mid \ P'(1) = P(-1) \,\}\,.$$

(a) Montrer que $W$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

(b) Déterminer une famille génératrice de $W$ possédant $3$ éléments.

(c) La famille que vous avez trouvée au (b) est-elle libre ou liée ? Justifier.

**Solution**

(a) Tout d'abord, le polynôme nul appartient à $W$ :

$$0'_{\mathbb{R}_3[X]}(1) = 0 = 0_{\mathbb{R}_3[X]}(-1)\,.$$

Soient ensuite $P(X), Q(X) \in W$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et vérifions que :

$$R(X) = P(X) + \alpha Q(X)$$

appartient à $W$. Pour cela, on calcule :

$$R'(1) = P'(1) + \alpha Q'(1) = P(-1) + \alpha Q(-1) = R(-1)\,.$$

La condition définissant $W$ est donc bien vérifiée par $R(X)$ : on a bien $R(X) \in W$.

(b) On commence par écrire la forme générale d'un élément de $\mathbb{R}_3[X]$ :

$$P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d\,.$$

On explicite ensuite la condition définissant $W$ :

$$\underbrace{3a + 2b + c}_{P'(1)} = \underbrace{-a + b - c + d}_{P(-1)} \quad \Leftrightarrow \quad d = 4a + b + 2c\,.$$

On peut maintenant écrire la forme générale d'un élément de $W$ :

$$P(X) \in W \quad \Leftrightarrow \quad P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + 4a + b + 2c = a(X^3+4) + b(X^2+1) + c(X+2)\,.$$

On obtient de cette manière une famille génératrice de $W$ possédant $3$ éléments :

$$X^3 + 4,\ X^2 + 1,\ X + 2\,.$$

(c) La famille obtenue est libre :

$$a(X^3 + 4) + b(X^2 + 1) + c(X + 2) = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \quad \Rightarrow \quad a = b = c = 0$$

(dans le polynôme nul les coefficients de $X^3, X^2$ et $X$ sont nuls).